ETHÉN

CIRM, 23-26 SEPTEMBRE 2024

1. COURS

Laura CAPUANO : Uniformity results in Diophantine Geometry

In these lectures we will survey recent breakthrough in uniformity questions in Diophantine geometry, focusing on Dimitrov-Gao-Habegger proof of a uniform version of Mordell's Conjecture (Faltings Theorem). After an introduction to Mordell's conjecture and to related problems, we will describe how the new height inequality by Gao and Habegger, combined with the classical Vojta's approach to Faltings theorem has led to a uniform version of this result. If time allows, we will describe how this inequality has been applied in other Diophantine contexts such as the new proof of relative Manin-Mumford conjecture.

Emmanuel KOWALSKI : L'équirépartition des classes de Frobenius, de Kronecker à Katz

De nombreux problèmes de théorie des nombres, aussi bien algébriques qu'analytiques, dépendent des propriétés de répartition asymptotique des automorphismes de Frobenius associés à des corps de nombres, des sommes exponentielles, ou d'autres objets arithmétiques. Le cours présentera ces résultats et certaines de leurs applications, allant du premier théorème de Kronecker concernant le nombre de solutions d'un polynôme sur un corps fini, aux théorèmes d'équirépartition de Deligne et Katz, en passant par le théorème de densité de Chebotarev. Les interactions avec l'analyse harmonique seront mises en valeur.

Marco MACULAN : Finitudes diophantiennes : de l'équation aux S-unités à la conjecture de Shafarevich

L'équation $x + y = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions parmi les S-unités d'un corps de nombres. Cet énoncé diophantien s'interprète comme la finitude des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques ayant bonne réduction en dehors de S et munies d'une base de leur 2-torsion. Faltings démontre une telle finitude pour les variétés abéliennes, une généralisation en dimension supérieure des courbes elliptiques. Il en déduit un résultat spectaculaire, la conjecture de Mordell : toute courbe projective non-singulière de genre au moins 2 n'admet qu'un nombre fini de points définis sur un corps de nombres. Dans ce cours on retracera ces étapes d'un point de vue récent introduit par Lawrence et Venkatesh pour aboutir, si le temps le permet, à la finitude de sous-variétés de variétés abéliennes.

Vlerë MEHMETI : Le dixième problème de Hilbert et le principe local-global

Le dixième problème de Hilbert demande s'il est possible de construire un algorithme qui décidera correctement si un polynôme quelconque à coefficients entiers a des racines entières. Un résultat célèbre de Davis-Putnam-Robinson-Matiyasevich montre qu'un tel algorithme ne peut exister. Cependant, en posant la même question pour les corps de nombres, et en particulier pour les rationnels, la réponse est toujours inconnue. Plusieurs avancées importantes ont été réalisées en travaillant sur des corps valués. En particulier, des résultats majeures ont été obtenus grâce à l'utilisation de principes locaux-globaux, initiée par un article de Robinson où le théorème de Hasse-Minkowski est appliqué. Dans cette direction, l'utilisation de techniques de la théorie des modèles s'est avérée très utile. Après une introduction à ces notions et questions, nous verrons certains des résultats obtenus grâce à l'application de divers principes locaux-globaux dans le cadre du dixième problème de Hilbert.

Sophie MOREL : Théorie des nombres dans l'assistant de preuve Lean

Cet exposé ne suppose aucune connaissance des assistants de preuve ou de Lean. Je commencerai par expliquer le principe de l'assistant de preuve Lean, puis je présenterai sa bibliothèque mathématique et quelques projets de formalisation, en particulier en théorie des nombres.

Joël RIVAT : Les nombres premiers

Les nombres premiers sont les briques multiplicatives des nombres entiers. La simplicité de leur définition ne laisse pas immédiatement soupçonner leur aspect chaotique, leur caractère insaisissable et la complexité de la moindre question qui les met en oeuvre. Ils exercent depuis des millénaires une fascination sans cesse renouvelée, aussi bien auprès du grand public que des personnalités les plus expertes. Depuis quelques années les nombres premiers connaissent une actualité particulièrement riche, couronnée par la médaille Fields attribuée en 2022 à James Maynard. Nous présenterons un florilège de conjectures, résultats et développements récents illustrant la richesse des nombres premiers et de leurs propriétés.

2. Exposés

Thomas AGUGLIARO : Abelian varieties satisfying the standard conjecture of Hodge type

Two standard conjectures are still open for abelian varieties, namely that numerical and homological equivalence coincide, and the standard conjecture of Hodge type. In this talk, we will describe the algebra of Tate classes on abelian varieties, and explain the relation with the standard conjecture of Hodge type. We will then produce many abelian varieties satisfying this conjecture.

Ayoub AL UARTASSI : Classes de Steinitz d'extensions galoisiennes non ramifiées

Soient K un corps de nombres, Cl(K) son groupe de classes et E(K) le groupe des unités de son anneau des entiers. On dit que K est de type classe si toute extension quadratique de K de la forme $K(\sqrt{\epsilon})$, où epsilon est un élément de E(K), est ramifiée en au moins un idéal premier ; sinon, on dit qu'il est de type unité. Soit G un groupe fini. On désigne par R(K,G) le sous-ensemble de Cl(K) formé par les classes réalisables comme classes de Steinitz d'extensions galoisiennes de K, non ramifiées aux places finies de K et ayant un groupe de Galois isomorphe à G. Dans cet exposé, on va définir l'ensemble R(K, Z/2Z) explicitement en utilisant le fait que K soit de type classe ou de type unité, et on montre que 1 union R(K,G) est un sous-groupe de 1 union R(K,Z/2Z) si G est d'ordre impair, ou bien a un 2-sous-groupe de Sylow non cyclique, ou bien a un 2-sous-groupe de Sylow cyclique et normal.

Martin AZON : Abelian surfaces over $F_q(t)$ with large Tate-Shafarevich groups

We will study Tate–Shafarevich groups of abelian surfaces over the rational function field $\mathbb{F}_q(t)$. For any abelian variety $A/\mathbb{F}_q(t)$, Hindry and Pacheco gave upper bounds on $|\operatorname{Sha}(A)|$ (assuming its finiteness) in terms of the exponential height $H(A)$. In this talk we will show that in dimension 2 their bound is sharp. We explicitly construct a family of non-isotrivial Jacobians of genus 2 hyperelliptic curves $(S_a)_{a\geq 1}$ satisfying $|\operatorname{Sha}(S_a)| = H(S_a)^{1+o(1)}$. We will see that the S_a's satisfy the BSD conjecture (so $\operatorname{Sha}(S_a)$ is finite) and will give an explicit formula for their L-function. Employing analytic techniques, we can estimate the size of the special value $L^\star(S_a)$, and via the BSD formula recover the desired bound on the size of $\operatorname{Sha}(S_a)$.

Tom BUREL : Equidistribution of rational curves in hypersurfaces

I will present a "quantitative" way to study the moduli space of rational curves (of fixed degree and verifying given jet conditions) in a complex projective hypersurface. More precisely the goal is to obtain an asymptotic expression in the degree. This relies on adapting the Hardy-Littlewood circle method by replacing the global field $F_q(t)$ with C(t), and uses the notions of Grothendieck ring of varieties and of motivic Euler product.

Nirvana COPPOLA : Arithmetic of Ciani curves

Ciani curves are non-hyperelliptic curves of genus 3 with automorphism group given by $(Z/2Z)^2$. In this talk we explore the stable reduction types of Ciani curves and their invariants.

Mathieu DA SILVA : The Loughran-Smeets conjecture for a family of conic fibrations over $\mathbf{P}^n$ with n large

During the 90's, Serre initiated a research program around the probability that a diophantine equation randomly chosen among a family has a rational solution. For example, he proved that 0% of the planar diagonal conics have a rational point. Only few cases are known nowadays, although a conjecture due to Loughran and Smeets predicts an asymptotic in some cases. Using the circle method, I will focus in this talk on this conjecture for the family of conics (parametrized by $\mathbf{t}$) given by $f_1(\mathbf{t})x_1^2 + f_2(\mathbf{t})x_2^2 + f_3(\mathbf{t})x_3^2 = 0$ with $\mathbf{t} \in \mathbf{P}^n(\mathbb{Q})$ and the f_i are homogeneous polynomials of same degree d with many variables.

Jonathan JENVRIN : On the height of some generators of Galois extensions with big Galois group

The height, introduced by Weil and Northcott in the 1930s, is an important tool in Diophantine geometry that allows us to measure the 'arithmetic complexity' of algebraic numbers. While the height is always positive and zero only at zero and roots of unity, there are many interesting open problems concerning points of small height. In this talk, I will discuss, in particular, some questions concerning the height of generators of Galois extensions of the rationals. I will show that if these are obtained from certain, albeit classical, constructions and the extensions they generate have the alternating group as their Galois group, their height tends to infinity as n increases. This provides an analogue of a result by Amoroso, originally established for the symmetric group.

Adrien MOUNIER : Un crible minorant effectif pour les entiers friables

Soient $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers naturels non-nuls et $y \geq 1$. Nous donnons une minoration effective du cardinal de l'ensemble $\{n \in \mathcal{A}; p|n \Rightarrow p \leq y\}$ sous la condition d'une bonne connaissance du niveau de répartition de l'ensemble $\mathcal{A}$. Quelques conséquences seront ensuite abordées, dont une application aux valeurs friables de polynômes ou de formes binaires irréductibles à coefficients entiers, puis une application aux entiers friables voisins.

Séverin PHILIP : The semi-stability degree for abelian varieties

We will present an effective optimal version of the semi-stable reduction theorem of Grothendieck. First we will introduce the problem of the semi-stability degree starting from the case of elliptic curves and up to the theorem of Grothendieck. We will then present one of the principal objects in this work : the finite monodromy groups of an abelian variety with some of their properties and relation to semi-stable reduction. We will sketch how to obtain a local-global principle for these groups which will reduce our problem to a purely local one. The last part of the talk will be dedicated to the construction of abelian varieties with prescribed finite monodromy groups by deformation and descent starting from polarised abelian varieties over finite fields.

Béranger SEGUIN : Counting extensions of simple algebras over number fields

This talk is centered around results concerning the asymptotical density of discriminants of (inner and outer) extensions of a given simple algebra over a number field. This project is a noncommutative generalization of the question of the distribution of number fields. This is joint work with Fabian Gundlach.

Rafik SOUANEF : Bases for Washington's circular units of real cyclotomic fields and totally deployed fields

We aim to present families of generators with minimal cardinality - we call such families bases - of the free abelian group Was(K) / Z(K) whenever K is a real cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta_n)^+$ or K is a totally deployed abelian number field, that is $K = K_1 \dots K_r$ with $K_i \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p_i^{e_i}})$ for some prime numbers $p_1, \dots, p_r$. Here, Was(K) refers to the group of Washington's cyclotomic units of K and Z(K) refers to the group of roots of unity lying in K.

In both cases, we use elementary methods. When K is a totally deployed abelian number field, we will consider a family of elements of K that has $rg_{\mathbb{Z}}(Was(K)) = r_1 + r_2 - 1$ elements (where r_1 is the number of real embeddings of K and r_2 is half of the number of complex embeddedings of K) and that generates a direct factor of $Was(\mathbb{Q}(\zeta_n))/Z(\mathbb{Q}(\zeta_n))$. It is not hard to see that this property makes this family generate Was(K)/Z(K) so that this family is a basis. More precisely, we will construct a basis of Was(K) that can be completed with Gold and Kim's basis to form a basis of $Was(\mathbb{Q}(\zeta_n))$. This idea has already been used in Milan Werl's article "On bases of Washington's group of circular units of some real cyclic number fields" and Kim, Jae Moon and Ryu, Jado's article "Construction of a certain circular unit and its applications".